Wittgensteins Kritik an Gödel und das versteckte tertium non datur

Esther Ramharter, Wien

Hört man das erste Mal von einer Kritik Wittgensteins an Gödels Resultaten, so fragt man sich vielleicht, was eine „Kritik“ an Gödels Ergebnissen überhaupt sein soll. Die Ergebnisse sind so einhellig anerkannt, dass es kaum möglich zu sein scheint, sie sinnvoll zu attackieren. Sind es einfach die philosophischen Implikationen, die Wittgenstein kritisiert? Wittgenstein nimmt keinerlei Bezug auf philosophische Folgerungen, die Gödel oder andere aus Gödels Theoremen gezogen haben. Wittgensteins Angriff richtet sich, wie es von ihm zu erwarten ist, gegen die Grundlagen dessen, worauf die Gödelschen Resultate gestützt sind.

1. Wittgensteins Kritik an Gödel

Es gibt zwei Passagen in den BGM, in denen Wittgenstein sich zu Gödel äußert, nämlich Anhang III von Teil I und Teil VII §19 ff. Meine Ausführungen beziehen sich auf die erste der beiden Passagen. Die Kritik Wittgensteins an den Grundlagen der Gödelschen Resultate verläuft m.E. entlang vier Linien. Sie setzt beim mittlerweile einheitlich sogenannten Gödel-Satz (Γ) an, den man in informeller Sprechweise so beschreiben kann: Er sagt von sich selbst aus, dass er unbeweisbar ist. (Diese Sprechweise ist allerdings insofern höchst bedenklich, als Gödels Verdienst gerade darin bestand, diese Selbstbezüglichkeit auf eine technische Weise aufzubrechen.) Die vier Linien der Kritik möchte ich folgendermaßen markieren:

> Du musst die Deutung aufgeben.
>
> Sätze wie Γ sind böse.
>
> Was stört ein Widerspruch?
>
> Sätze (der Mathematik und Logik) müssen sich in der Anwendung bewähren.

Kritik (1) hat ihr Zentrum in folgender Passage (BGM Teil 1, Anhang III, §8):

> Ich stelle mir vor, es fragte mich Einer um Rat; Er sagt: „Ich habe einen Satz (ich will ihn mit ‚P’ bezeichnen) in Russells Symbolen konstruiert, und den kann man durch gewisse Definitionen und Transformationen so deuten, dass er sagt: ‚P ist nicht in Russells System beweisbar’. Muß ich nun von diesem Satz nicht sagen: einerseits er sei wahr, andererseits er sei unbeweisbar? Denn angenommen, er wäre falsch, so ist es also wahr, daß er beweisbar ist! Und das kann doch nicht sein. Und ist er bewiesen, so ist bewiesen, daß er nicht beweisbar ist. So kann er also nur wahr, aber unbeweisbar sein.“ [...] Was heißt nun dein: „angenommen, [der Gödelsatz, Verf.] sei falsch“? In Russells Sinne heißt es: „angenommen das Gegenteil sei in Russells System bewiesen“; ist das deine Annahme, so wirst du jetzt die Deutung, er sei unbeweisbar, wohl aufgeben. Und unter dieser Deutung verstehe ich die Übersetzung in diesen deutschen Satz.

Wenn die Behauptung, der Satz Γ besage seine Unbeweisbarkeit, zu Schwierigkeiten führt, dann, so Wittgenstein, möge man diese Behauptung aufgeben. Dieser Versuch Wittgensteins, die Probleme, die von den Gödel-Ergebnissen aufgeworfen werden, zu beseitigen, lässt uns aber mit einer Schwierigkeit zurück: *Wie* sollen wir die Deutung aufgeben? Jeder der durchgeführten Schritte in Gödels Beweis, insbesondere die Konstruktion des Beweisbarkeitsprädikats und die Diagonalisierung, bewegen sich im Rahmen anerkannter Mathematik. Wenn man die Konstruktion gerade so *gemacht* hat, dass sie genau das leistet, was man eben von ihr erwartet, wie kann man dann im Nachhinein sagen: „Nein, sie tut es doch nicht“? Anders gesagt, es müsste sich eine Stelle im Konstruktionsprozess ausfindig machen lassen, an der die Konstruktion versagt; eine solche aber ist nicht zu erkennen und Wittgenstein nennt auch keine.

Die zweite Stoßrichtung von Wittgensteins Kritik (2) kulminiert in der Aussage (§11):

> Das kommt davon, wenn man solche Sätze [wie Γ, Verf.] bildet.

Wittgenstein tritt also für eine ad hoc-Elimination von sich als unbrauchbar erweisenden Sätzen ein. Seine Argumentation dazu verbindet er mit Einwand (3), welcher lautet (§18):

> Man kann ja den Satz des Widerspruchs sehr wohl falsch nennen.

Wittgenstein radikalisiert also die Infragestellung der logischen Grundprinzipien, die Brouwer mit seiner Zurückweisung des tertium non datur begonnen hatte, indem er auch den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch nicht unbedingt gelten lassen will.

Eine Verbindung der Einwände (2) und (3) zeigt sich in folgendem Absatz (§12):

> 12. Schadet der Widerspruch, der entsteht wenn Einer sagt: „Ich lüge. – Also lüge ich nicht. – Also lüge ich. – etc.“? Ich meine: ist unsere Sprache dadurch weniger brauchbar, daß man in diesem Fall aus einem Satz nach den gewöhnlichen Regeln sein Gegenteil und daraus wider ihn folgern kann? – der Satz *selbst* ist unbrauchbar, und ebenso dieses Schlüsseziehen.

Sätze wie Γ und „Ich lüge“ erzeugen (nach Wittgensteins Auffassung[1]) einen Widerspruch. Aus dieser Situation sieht Wittgenstein zwei Auswege: Mit dem Widerspruch zu leben[2] oder solche Sätze zu verbannen. Jedenfalls nicht als sinnvolle Lösung sieht Wittgenstein es an, den Kontext damit als in seinen Grundfesten erschüttert zu begreifen, d.h. im Fall des Gödel-Resultats: die Idee der prinzipiellen Beweisbarkeit oder Widerlegbarkeit mathematischer Sätze aufzugeben.

Kritik (4) ist eine sehr allgemeine (§20):

> *20.* Man muß sich hier daran erinnern, daß die Sätze der Logik so konstruiert sind, daß sie als *Information keine*

[1] Sie erzeugen einen Widerspruch nur dann, wenn das tertium non datur für Beweisbarkeit von Sätzen vorausgesetzt wird, oder das Gödel-Resultat als „der Vernunft widersprechend“ angesehen wird.

[2] Die Parakonsistente Logik gibt Wittgenstein recht. Sieht man sich nämlich genauer an, warum man eine (logische) Sprache, die einen Widerspruch enthält, für unbrauchbar hält, so bemerkt man, dass der Grund für die Unbrauchbarkeit eigentlich nicht im Auftreten des Widerspruchs liegt, sondern im sich daraus in der klassischen Logik ergebenden „ex falso quodlibet“, also darin, dass der Wahrheitsbegriff dann überhaupt obsolet wird. Die parakonsistente Logik wählt eine Grundlage, die zwar nicht den Widerspruch, aber das „ex falso quodlibet“ ausschließt.

> Anwendung in der Praxis haben. Man könnte also sehr wohl sagen, sie seien garnicht *Sätze;* und daß man sie überhaupt hinschreibt, bedarf einer Rechtfertigung. Fügt man diesen „Sätzen“ nun ein weiteres satzartiges Gebilde andrer Art hinzu, so sind wir hier schon erst recht im Dunkeln darüber, was dieses System von Zeichenkombinationen nun für eine Anwendung, für einen Sinn haben soll, denn der bloße *Satzklang* dieser Zeichenverbindungen gibt ihnen ja eine Bedeutung noch nicht.

Sätze müssen sich nach Wittgenstein in der Wirklichkeit bewähren. Das können schon die Tautologien nicht in der herkömmlichen Weise, um wie viel weniger können es Sätze wie Γ – so Wittgenstein.

2. Die Rolle des tertium non datur im Allgemeinen und im Besonderen

Wittgenstein ist, wie ich im Folgenden argumentieren werde, inkonsequent in seiner Haltung zum tertium non datur bei seiner Kritik an Gödel. Wohlverstandene Inkonsequenz aber ist sein (politisches) Programm in Bezug auf die Mathematik und gleichzeitig eine von insgesamt drei Haltungen, die Wittgenstein gegenüber dem tertium non datur einnimmt. Die erste ist die Kritik am tertium non datur, mit der er sich Brouwer zumindest teilweise anschließt. Die zweite ist die unbewusst überzeugte, die sich etwa in seiner Kritik an Gödel bahnbricht. In der dritten findet Wittgenstein seinen üblichen Ausweg: „Es kommt darauf an.“

2.1 Nein zum tertium non datur

Brouwers Kritik an der klassischen Logik und Mathematik blieb nicht ohne Wirkung auf Wittgenstein (Richter 1965). Auch Wittgenstein formuliert grundsätzliche Bedenken gegenüber dem tertium non datur. Konkret geht er diesen Bedenken anhand der Frage nach, ob in der Entwicklung von π eine gewisse Anordnung φ von Ziffern vorkommt (BGM Teil V, §9):

> „Was aber sagt der, der sagt, eines sei klar: man werde oder werde nicht, in der endlosen Entwicklung auf φ kommen?
> Mir scheint, wer dies sagt, stellt selbst schon eine Regel, oder ein Postulat auf.
> Wie, wenn man auf eine Frage hin erwiderte: ‚Auf diese Frage gibt es bis jetzt noch keine Antwort’?
> So könnte etwa der Dichter antworten, der gefragt wird, ob der Held einer Dichtung eine Schwester hat oder nicht – wenn er nämlich noch nicht darüber entschieden hat.“

Das tertium non datur, wie es üblicherweise gebraucht wird, klassifiziert Wittgenstein also als ein Postulat. Das Postulat lautet angewendet auf das konkrete Beispiel: „Es gilt: π enthält φ oder π enthält φ nicht“. Diesen üblichen Gebrauch kontrastiert er mit dem Umgang eines Dichters mit einer solchen Frage, der nämlich in seiner Antwort nicht festgelegt ist. Inwiefern nun ist der Dichter nicht festgelegt?

> „Wenn einer den Satz vom ausgeschlossenen Dritten aufstellt, so legt er uns gleichsam zwei Bilder zur Auswahl vor und sagt, eins müsse der Tatsache entsprechen. Wie aber wenn es fraglich ist, ob sich die Bilder hier anwenden lassen?
> Und wer da von der endlosen Entwicklung sagt, sie müsse die Figur φ enthalten oder sie nicht enthalten, zeigt uns sozusagen das Bild einer in die Ferne verlaufenden unübersehbaren Reihe.
> Wie aber, wenn das Bild in weiter Ferne zu flimmern anfinge?“ (BGM Teil V, §10)

Damit zeichnet Wittgenstein das Programm seiner Kritik vor. Zum einen ist nicht klar, dass sich die Bilder – einzeln – anwenden lassen. Zum anderen kann, anwendbare Bilder vorausgesetzt, immer noch unklar sein, ob die Aussage „Es gilt: π enthält φ oder π enthält φ nicht“ richtig ist oder auch nur einen klaren Sinn hat. Wittgenstein hintergeht also das Aufstellen des Postulates in drei Weisen. Er hinterfragt der Reihe nach (1) „Es gilt p oder non p“, (2) den Satz „π enthält φ“ und (3) den Satz „π enthält φ nicht“.

Das Postulat „Es gilt p oder non p“ in Zweifel zu ziehen (1), war genau das Anliegen Brouwers. Wittgenstein (BGM Teil V, §10) ist in diesem Punkt sehr kurz:

> „Wie aber, wenn das Bild in weiter Ferne zu flimmern anfinge?“

Selbst wenn die Sätze p und non p eine klare Bedeutung haben, ist nicht klar, ob wir sicher sein können, dass entweder der eine oder der andere gilt. Das ist Brouwers Hauptanliegen.

Auch non p, im vorliegenden Fall „π enthält die Figur *nicht*“, erklärt Wittgenstein zuständig für eine mögliche Unklarheit (3) (BGM Teil V, §11):

> „Von einer unendlichen Reihe zu sagen, sie enthielte eine bestimmte Figur nicht, hat nur unter ganz speziellen Bedingungen Sinn.“

Die Infragestellung (2) der Aussage „π enthält die Figur“ ist die für Wittgenstein typischste von den drei Vorbringungen zum tertium non datur (§12), insofern als sie hinterfragt, was gar so selbstverständlich daherkommt. Wittgenstein fragt: Was meint man mit „Die Figur ... kommt in dieser Entwicklung vor“? Für Brouwer ist völlig klar, was dieser Satz heißt, nämlich einfach, dass man die Entwicklung bis zu irgendeinem Punkt aufgeschrieben hat und bis dorthin φ mindestens einmal vorgekommen ist. Der Satz „π enthält φ“ erscheint wirklich völlig unverdächtig. Die Fragwürdigkeit wird erst klar, wenn man sieht, wie Wittgenstein nach einem langen Hin- und Her die Überlegungen schließlich wieder einmünden lässt in seine allgemeinen Überlegungen zum Lernen von Sprache (BGM Teil V, §12):

> „Wie weiß ich denn, was es heißt: die Figur ... komme in der Entwicklung vor? Doch durch Beispiele – die mir zeigen, wie das ist, wenn... Diese Beispiele zeigen mir aber nicht, wie es ist, wenn die Figur in der Entwicklung vorkommt!“

Wittgenstein vertritt in den PU die Auffassung, dass jedes Lernen von Sprache in letzter Instanz ein Lernen anhand von Beispielen ist, anhand derer dem Lernenden vorgemacht wird, wie ein Element der Sprache zu gebrauchen ist. Diese Möglichkeit hält Wittgenstein in Bezug auf den Satz „π enthält φ“ für grundsätzlich verwehrt, weil es laut Annahme ja gerade noch kein Beispiel für ein Vorkommen von φ in π gibt und es auch überhaupt kein Beispiel geben kann, das beschreibt, wie eine Ziffernfolge in der Entwicklung einer Zahl vorkommt, wenn man das Vorkommen noch nicht festgestellt hat.

2.2 Ja zum tertium non datur

Während ich im vorigen Abschnitt Wittgensteins Bedenken gegen das tertium non datur nachgezeichnet habe, wird es nun darum gehen, Wittgensteins Verhältnis zum Prinzip des tertium non datur gleichzeitig als bejahend auszuweisen. Wenn ich Wittgenstein also eine Inkonsequenz nachsage, so auf einer performativen Ebene. Um das nachzuweisen, muss ich eine Stelle angeben, an der Wittgenstein tatsächlich das tertium non datur zur Grundlage seiner Argumentation macht. Die für meine Absicht entscheidende Passage beginnt folgendermaßen (BGM Teil 1, Anhang III, §8):

> „[...] ‚in Russells System wahr' heißt, wie gesagt: in Russells System bewiesen; und ‚in Russells System falsch' heißt: das Gegenteil sei in Russells System bewiesen."

Ganz selbstverständlich bedient sich Wittgenstein in der Folge des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten, indem er davon ausgeht, dass eine dritte Alternative nicht in Frage kommt. Da er Wahrheit und Beweisbarkeit identifiziert, geht er somit stillschweigend von der *Annahme* aus, dass jeder Satz entweder beweisbar oder widerlegbar ist (im Widerspruch zu Gödels Resultat). Damit setzt er aber das Prinzip des tertium non datur an einer Stelle voraus, an der es selbst Nicht-Intuitionisten für bedenklich erscheinen muss.

2.3 Naja zum tertium non datur

Begeht Wittgenstein damit schlicht einen notwendigen performativen Selbstwiderspruch, dh *muss* Wittgenstein das tertium non datur, dessen prinzipielle Berechtigung er anzweifelt, in seinen Aussagen benutzen? So einfach liegen die Dinge bei Wittgenstein nicht. Wittgenstein bezweifelt nämlich nicht die Gültigkeit des tertium non datur prinzipiell. Er lässt schon gelten, dass entweder etwas „so ist" oder es „so nicht ist", falls klar ist, was es heißt, etwas „ist so". Was er bezweifelt, ist, dass wir das „ist" oder „ist nicht" jeweils einzeln in den in Bezug auf das Tertium non datur fragwürdigen Fällen so eindeutig bestimmen können bzw. dass wir beide so deutlich trennen können, dass eines davon eintreten muss. Wenn also überhaupt das „Oder" in Frage steht, dann nur weil die beiden Disjunkte nicht deutlich voneinander abgrenzbar sind.

3. Wittgensteins Wissen und Gewissheit in Bezug auf die Mathematik

Wittgenstein behandelt das tertium non datur als eine in gewisser Hinsicht nicht-hinterfragbare Gewissheit. Wittgensteins Auffassung von Wissen und Gewissheit, die er in ÜG zum Ausdruck bringt, geht davon aus, dass es Sätze gibt, die wir nicht ernsthaft bestreiten können, weil wir uns sonst außerhalb des Kommunikationsrahmens stellen. Diese Vorstellung nimmt er mit in seine Überlegungen zur Mathematik. Mathematik ist in unserem Verständnis wesentlich Beweisen und Widerlegen. Wir können nicht von einer Mathematik sprechen, in der nicht prinzipiell bewiesen oder widerlegt werden kann[3], daher kann man alle Prinzipien eher opfern, als jenes, das besagt, dass Sätze der Mathematik stets entweder beweisbar oder widerlegbar sind.

Literatur

Floyd, J. 1996 *On Saying What You Really Want to Say: Wittgenstein, Gödel and the Trisection of the Angle*, in Hintikka, J., 1996, Essays on the Development of the Foundations of Mathematics, Dordrecht: Kluwer Acadamic Publishers, 373-425.

Richter, V. 1965 *Untersuchungen zur operativen Logik der Gegenwart*, Freiburg – München: Verlag Karl Alber.

Wittgenstein L. 1984 PU *Philosophische Untersuchungen*, Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. 1984 BGM *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein L. 1984 ÜG *Über Gewissheit*, Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wright, C. 1980 *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, Gregg Revivals, Aldershot – Brookfield.

[3] Die Feststellung von Wittgensteins „desire to identify mathematical truth with provability" in (Wright 1980), p.28 ist also korrekt, übersieht aber m.E. den entscheidenden Punkt.