

Abbildung und lebendes Bild in Tractatus und Nachlass

Christian Erbacher, Bergen, Norwegen

1. „Der Satz ist ein Bild der Wirklichkeit.“ (4.01)

Zu seiner Verwendung des Begriffs des Bildes im *Tractatus* sagt Wittgenstein im Gespräch mit Waismann vom 9. Dezember 1931, dass sie in zwei verschiedenen Auffassungen wurzeln: zum einen im ‚gewöhnlichen Sinne‘ (vgl. 4.011) des Wortes, etwa wenn man von einem gezeichneten Bild spreche; zum anderen im mathematischen Begriff der ‚Abbildung‘:

„Als ich schrieb: ‚Der Satz ist ein logisches Bild der Tatsache‘¹, so meinte ich: ich kann in einen Satz ein Bild einfügen, und zwar ein gezeichnetes Bild, und dann im Satz fortfahren. Ich kann also ein Bild wie einen Satz gebrauchen. Wie ist das möglich? Die Antwort lautet: Weil eben beide in einer gewissen Hinsicht übereinstimmen, und dieses Gemeinsame nenne ich *Bild*. Der Ausdruck ‚Bild‘ ist dabei schon in einem erweiterten Sinn genommen. Diesen Begriff des Bildes habe ich von zwei Seiten geerbt: erstens von dem gezeichneten Bild, zweitens von dem Bild des Mathematikers, das schon ein allgemeiner Begriff ist. Denn der Mathematiker spricht ja auch dort von Abbildung, wo der Maler diesen Ausdruck nicht mehr verwenden würde.“ (WWK 1989, S.185)

Die vorliegende Untersuchung zeigt, welche Stellen des *Tractatus* mit dem Begriff im mathematischen Sinn in Verbindung stehen und wo die Verwendung wechselt.

2. Mathematische Bestimmungen der Begriffe *Abbildung* und *Repräsentation*

Für die Analyse ist die Erinnerung an einige Begriffsbestimmungen hilfreich. Die Angaben orientieren sich an Orth (1975; vgl. aber auch z.B. Suppes 1988)

Abbildung

Unter einer *Abbildung* von einer Menge A in eine andere Menge B versteht man eine *Vorschrift* (auch: *Zuordnung*, *Zuordnungsregel*), die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet. Da jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zugeordnet wird, bezeichnet man eine Abbildung auch als *eindeutig*. Wird A in B abgebildet, so heißt B *Bild* von A und A *Urbild* von B .

Wenn es umgekehrt ebenfalls zu jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$ gibt, so heißt die Abbildung *umkehrbar eindeutig* (auch: *bijektiv*). Es besteht hierbei also nicht nur eine Abbildung von A in B , sondern auch umgekehrt von B in A ; man schreibt: $\varphi(a) = b$.

Homomorphe Abbildung (Repräsentation) und Isomorphismus

Von einer *homomorphen Abbildung* spricht man, wenn nicht nur eine Menge in eine andere abgebildet wird, sondern auch Relationen zwischen den Elementen dieser Menge. Mindestens eine Menge und mindestens eine

darauf definierte Relation fasst man als *Relativ* (auch: *Relationenstruktur*) zusammen. Man schreibt hierfür $A = \langle A, R_1, \dots, R_n \rangle$. Eine *Relation* ist eine Teilmenge aller geordneten Paare, die zueinander in einer *bestimmten Beziehung* stehen.

Bei einer homomorphen Abbildung wird also ein Relativ in ein anderes Relativ abgebildet. Man kann dies auch so ausdrücken, dass das Bild einer Relation zwischen zwei Elementen aus der Menge A gleich der Relation der Bilder in der Menge B ist. Eine entsprechende Definition lautet:

D1: „Es seien $A = \langle A, R_1, \dots, R_n \rangle$ und $B = \langle B, S_1, \dots, S_n \rangle$ zwei Relative desselben Typs. Eine Abbildung φ von A in B heißt *homomorphe Abbildung* (oder: *Homomorphismus*) von A in B , wenn für alle Elemente $a_1, a_2 \in A$ und für alle $i = 1, 2, \dots, n$ gilt: $\varphi[R_i(a_1, a_2)] = S_i[\varphi(a_1), \varphi(a_2)]$.“ (Orth, S.16)

Besteht eine homomorphe Abbildung von A in B , so sagt man auch, dass A durch B *repräsentiert* wird, und B eine *Repräsentation* von A ist. *Isomorphe Abbildung* (auch: *Isomorphismus*) wird eine bijektive Repräsentation genannt, also eine umkehrbar eindeutige homomorphe Abbildung.

3. Repräsentation im *Tractatus*

Mit dem so definierten Begriffsinstrumentarium kann man sagen, dass der *Tractatus* die isomorphe Repräsentation der Welt durch Sprache darstellen soll. Dies wird nun an den Stellen des *Tractatus* aufgezeigt, die dem mathematischen Verständnis des Bildbegriffs entsprechen. Die Reformulierung in den oben bestimmten Begriffen ist den Zitaten kursiv vorangestellt:

1. *Die Welt wird als Relativ dargestellt, das aus der Menge der Gegenstände und ihren Relationen zueinander besteht.*

„Die Welt ist alles, was der Fall ist.“ (1)
„Was der Fall ist, die Tatsache, ist das Bestehen von Sachverhalten.“ (2)
„Der Sachverhalt ist eine Verbindung von Gegenständen (Sachen, Dingen).“ (2.01)
„Im Sachverhalt verhalten sich die Gegenstände in bestimmter Art und Weise zueinander.“ (2.031)
„Die Art und Weise, wie die Gegenstände im Sachverhalt zusammenhängen, ist die Struktur des Sachverhalts.“ (2.032)

2. *Der Satz wird als Relativ dargestellt, das aus Wörtern und ihren Relationen zueinander besteht.*

„Das logische Bild der Tatsachen ist der Gedanke.“ (3)
„Im Satz drückt sich der Gedanke sinnlich wahrnehmbar aus.“ (3.1)
„Das Satzzeichen besteht darin, daß sich seine Elemente, die Wörter, in ihm auf bestimmte Art und Weise zueinander verhalten“ (3.14)

¹ Waismann merkt an, dass dieser Satz nirgendwo genau steht und verweist auf die Stellen 3, 4.01, 4.03.

3. Der Elementarsatz wird als Relativ dargestellt, das die Welt isomorph repräsentiert:

Diese Reformulierung kann in drei Sätze aufgespalten werden:

a) *Im Elementarsatz bilden Namen Gegenstände ab, d.h. es besteht eine eindeutige Zuordnung von einfachen Zeichen zu Gegenständen:*

„Im Satze kann der Gedanke so ausgedrückt sein, daß den Gegenständen des Gedankens Elemente des Satzzeichens entsprechen.“ (3.2)

„Diese Elemente nenne ich ‚einfache Zeichen‘ und den Satz ‚vollständig analysiert‘.“ (3.201)

„Die im Satze angewandten einfachen Zeichen heißen Namen“ (3.202)

„Der Elementarsatz besteht aus Namen. Er ist ein Zusammenhang, eine Verkettung, von Namen.“ (4.22)

„Der Name kommt nur im Zusammenhange des Elementarsatzes vor.“ (4.23)

b) *Im Elementarsatz werden nicht nur Gegenstände abgebildet, sondern der Elementarsatz repräsentiert die Sachlage (bildet sie homomorph ab), da auch die Beziehungen zwischen den Gegenständen abgebildet werden:*

„Die Konfiguration der einfachen Zeichen im Satzzeichen entspricht die Konfiguration der Gegenstände in der Sachlage.“ (3.21)

c) *Die Beziehung zwischen Sprache und Welt ist nicht nur eine Repräsentation, sondern eine isomorphe Repräsentation, da eindeutige Rückübersetzbarkeit gefordert wird:*

„Daß es eine allgemeine Regel gibt, durch die der Musiker aus der Partitur die Symphonie entnehmen kann, durch welche man aus der Linie auf der Grammophonplatte die Symphonie nach der ersten Regel wieder die Partitur ableiten kann, darin besteht eben die Ähnlichkeit dieser scheinbar so ganz verschiedenen Gebilde. Und jene Regel ist das Gesetz der Projektion, welches die Symphonie in die Notensprache projiziert. Sie ist die Regel der Übersetzung der Notensprache in die Sprache der Grammophonplatte.“ (4.0141)

„Die Grammophonplatte, der musikalische Gedanke, die Notenschrift, die Schallwellen, stehen alle in jener abbildenden Beziehung zueinander, die zwischen Sprache und Welt besteht.“ (4.014)

Zusammenfassend kann man sagen, dass der *Tractatus* eine isomorphe Repräsentation von Sachverhalten durch Elementarsätze, von Welt durch Sprache, verlangt. Da der Sachverhalt der Sinn des ihn abbildenden Elementarsatzes ist („Was das Bild darstellt, das ist sein Sinn.“ (2.221)), kann man auch von einer Konzeption von Sinn als isomorphe Repräsentation sprechen (z.B. Hacker 1981, Glock 2006).

4. Der Wechsel zur gewöhnlichen Begriffsverwendung

Für die Frage, inwiefern im *Tractatus* durchgängig eine Theorie der isomorphen Repräsentation von Sinn formuliert wird, ist die Betrachtung einer Stelle aufschlussreich, in der von Bild nicht mehr im mathematischen Sinn gesprochen wird. Das ‚gewöhnliche Verständnis‘ des Begriffs erscheint mit der Beschreibung der Verkettung von einfachen Zeichen zu Elementarsätzen:

„Der Elementarsatz besteht aus Namen. Er ist ein Zusammenhang, eine Verkettung, von Namen.“ (4.22)

„Ein Name steht für ein Ding, ein anderer für ein anderes Ding und untereinander sind sie verbunden, so stellt das Ganze – wie ein lebendes Bild – den Sachverhalt vor.“ (4.0311)

Es wird hier, wie zuvor, gefordert, dass Namen zu Elementarsätzen verbunden sind; allerdings bleibt die Frage offen, welche Relationen zwischen Namen bestehen, wie die Verkettung von Namen ein „lebendes Bild“ bilden kann. Hierfür scheint der *Tractatus* keine weitere Zuordnungsregel (im mathematischen Sinn) anzugeben. (Die Verknüpfung von Namen durch logische Konstanten kommt hierfür nicht in Frage. Sie sind Operationen, die auf der Menge der *Elementarsätze* definiert sind und von Elementarsätzen zu allen anderen Sätzen führen.)

5. Bild und Abbildung in Manuskripten aus dem Nachlass

Der Blick in Wittgensteins *Nachlass* bestätigt den Eindruck in Bezug auf den Wechsel der Begriffsverwendung wie er oben für den *Tractatus* dargestellt wurde. Betrachtet man die drei Manuskriptbände *Ms101* (09. August 1914 – 30. Oktober 1914), *Ms102* (30. Oktober 1914 – 22. Juni 1915) und *Ms103* (29. März 1916 – 10. Januar 1917), sind Einträge in Verbindung mit den Begriffen Bild und Abbildung vor allem in *Ms101* und *Ms102* zu finden, und hier hauptsächlich in den Monaten September, Oktober und November 1914 (siehe Tabelle 1). Diese frühe Beschäftigung mit dem Thema weist auf seine grundlegende Bedeutung für den *Tractatus* hin.

Tab. 1: Vorkommnisse der Begriffe Bild/bil* und Abbildung/abbil* in *Ms101*, *Ms102* und *Ms103* (abs. Häufigkeiten, nach BEE, diplomatische Version).

	Bild/bil*	Abbildung/abbil*
<i>Ms101</i>	17/22	6/11
<i>Ms102</i>	53/67	4/10
<i>Ms103</i>	2/2	0/0

In *Ms101* scheint eine klare Trennung der zwei Verwendungsweisen mit vornehmlicher Verwendung des Begriffs im mathematischen Sinne vorzuliegen. So spricht Wittgenstein wiederholt von ‚logischem Abbild‘ (*Ms-101,22r*, *Ms-101,29r*, *Ms-101,52r*)² und ‚meiner Theorie der logischen Abbildung‘ (*Ms-101,52r*). Wenn von Bild im gewöhnlichen Sinn die Rede ist, dann in Abgrenzung zu dem logischen oder mathematischen Sinn der Abbildung. So heisst es in dem Eintrag vom 29. September 1914 zum Beispiel:

„Denken wir daran daß auch wirkliche Bilder von Sachverhalten stimmen und nicht stimmen können.“ (*Ms-101,28r*, Wittgensteins Unterstreichungen).

Dieser Eintrag entspricht im *Tractatus* einem Satz in 4.011, wo von Bildern „auch im gewöhnlichen Sinne“ gesprochen wird. Dass hier von „wirklichen Bildern“ und „auch im gewöhnlichen Sinne“ (meine Hervorhebung) gesprochen wird, legt nahe, dass *ansonsten* von Bild als Abbildung im präzisierten mathematischen Sinne die Rede ist. Es deutet

² Zitierweise der Nachlass-Dokumente orientiert sich an den Sigla, die am Wittgenstein-Archiv im Hyperwittgenstein- und DISCOVERY-Projekt (http://wab.aksis.uib.no/wab_discovery.page; http://wab.aksis.uib.no/wab_hw.page/) entwickelt wurden.

sich hier allerdings schon die Verschmelzung der beiden Verwendungsweisen an.

Für die vorliegende Untersuchung liegt der Kulminationspunkt der Manuskripteinträge zwischen Ende Oktober und Anfang November 1914. Der Eintrag vom 30. Oktober macht die entscheidende Rolle der Elementarsätze für die Idee der Repräsentation von Sachverhalten deutlich. Dort heisst es:

„Vor allem muß die Elementarsatzform abbilden, alle Abbildung geschieht durch diese.“ (MS-102,3r).

Die erste Hälfte des Eintrages vom 4. November lautet:

„Wie bestimmt der Satz den logischen Ort?
Wie repräsentiert das Bild einen Sachverhalt?
Selbst ist es doch nicht der Sachverhalt, ja dieser braucht gar nicht der Fall zu sein.
Ein Name repräsentiert ein Ding ein anderer ein anderes Ding und selbst sind sie verbunden; so stellt das Ganze — wie ein lebendes Bild — den Sachverhalt vor.“ (MS-102,17r-18r)

An dieser Stelle geschieht wie in *Tractatus* 4.0311 der Wechsel der Begriffsverwendung. Wittgenstein gibt hier keine Zuordnungsregel für einfache Zeichen zu Elementarsätzen an, sondern spricht von einem „lebenden Bild“.

In dem Notizbuch verwendet Wittgenstein fortan noch häufig den Begriff Bild, und zwar in Zusammenhängen des mathematischen Sinnes; den Begriff Abbildung verwendet er sehr viel weniger. Die beiden zunächst klar unterschiedenen Begriffe scheinen hier verschmolzen. Die deskriptive Statistik der Begriffe in den Manuskripten spiegelt die hier skizzierte Entwicklung sehr gut wider (siehe Tabelle 1).

6. Mathematische Mannigfaltigkeit

Der Rest des Notizbucheintrages vom 4. November beschäftigt sich weiter mit der Verbindung von Dingen und somit auch mit Relationen von Zeichen. Er drückt die Einsicht aus, dass die Verbindungen der Dinge den Relationen der abbildenden Elemente entsprechen müssen:

„Die logische Verbindung muß natürlich unter den repräsentierten Dingen möglich sein und dies wird immer der Fall sein wenn die Dinge wirklich repräsentiert sind. Wohl gemerkt jene Verbindung ist keine Relation sondern nur das Bestehen einer Relation.“ (MS-102,18r-19r)

Im *Tractatus* wird analog im Anschluss an 4.0311 mit Bezug auf die „mathematische Mannigfaltigkeit“ festgestellt, dass die Relationen der Namen im Elementarsatz den Verbindungen der Gegenstände entsprechen können müssen:

„Am Satz muss gerade soviel zu unterscheiden sein, als an der Sachlage, die er darstellt. Die beiden müssen die gleiche logische (mathematische) Mannigfaltigkeit besitzen. ...“ (4.04)

Liest man Definition D1 genau, so sieht man dass auch dort diese Forderung genannt ist, denn das abbildende Relativ soll „desselben Typs“ sein wie das abgebildete. Für die Relationen des Relativs der Elementarsätze gibt Wittgenstein im *Tractatus* aber keine Bestimmung. In dem folgenden Paragraphen heisst es stattdessen:

„Diese mathematische Mannigfaltigkeit kann man natürlich nicht selbst wieder abbilden. Aus ihr kommt man beim Abbilden nicht heraus.“ (4.0411)

7. Fazit

Der Tractatus gibt Bedingungen einer isomorphen Repräsentation von Sachverhalten an

Einerseits stellt der *Tractatus* die Forderung nach einer isomorphen Repräsentation von Welt dar (vgl. Hacker 1981, Glock 2006). Insofern gibt er Bedingungen für eine Theorie von Sinn als Repräsentation an. Andererseits wechselt Wittgenstein die Verwendung des Begriffs des Bildes von einem mathematischen zu einem gewöhnlichem Sinn, wenn er über die Verkettung von Namen zu Elementarsätzen spricht, also gerade dort, wo die Forderung nach einer Abbildung der Relationen zwischen Dingen erfüllt werden müsste. Abgesehen von der bloßen Forderung der Gleichartigkeit der Verbindungen zwischen Gegenständen und zwischen Namen wird im *Tractatus* keine Zuordnungsregel von Namen zu Elementarsätzen genannt.

Die Frage nach der Konzeption von Wahrheit im Tractatus ist nicht betroffen

Die Frage nach der Konzeption von Wahrheit ist von dieser Analyse nicht betroffen. Die Konzeption von Sinn muss von der Konzeption der Wahrheit im *Tractatus* unterschieden werden (Glock 2006). Insofern ist auch Hintikka (1994, S.223) zuzustimmen, dass es keinen Sinn hat von *der Abbildtheorie* zu sprechen, da verschiedene, voneinander weitgehend unabhängige Ideen unter diesem Titel verhandelt werden. Die hier besprochenen Aspekte betreffen Hintikkas erste von insgesamt sechs Abbild-Ideen („Elementarsätze als Bilder“, S. 224, 227-229). Ihre Formulierung hat zunächst keine Auswirkungen auf Operationen mit Elementarsätzen. Dies drückt auch Wittgenstein aus, wenn er schreibt:

„Die Schemata No. 4.31 haben auch dann eine Bedeutung, wenn ‚p‘, ‚q‘, ‚r‘, etc. nicht Elementarsätze sind“ (5.31).

„Das Leben von Zeichen“

Man kann auch die Frage, wie Zeichen ein „lebendes Bild“ bilden können, wie Leben in die Zeichen kommt, ohne Annahme von Elementarsätzen behandeln. Wie wir wissen, beschäftigt sich Wittgenstein mit dieser Frage in späteren Jahren.

Literatur

- Glock, Hans Johann 2006 „Truth in the Tractatus“, *Synthese* 148, 345–368.
- Hacker, P.M.S. 1981 „The Rise and Fall of the Picture Theory“, in: Irving Block (Hg.), *Perspectives on the Philosophy of Wittgenstein*, Oxford: Blackwell, S. 85–109.
- Hintikka, Jaakko 1994 „An Anatomy of Wittgenstein's Picture Theory“, in Carol C. Gould and Robert S. Cohen (Hrsg.), *Artifacts, Representations and Social Practice*, Dordrecht: Kluwer, S. 223–256.
- Orth, Bernhard 1974 *Einführung in die Theorie des Messens*, Stuttgart: Kohlhammer
- Suppes, Patrick 1988, „Representation theory and the analysis of structure“, *Philosophia Naturalis* 25, S. 254–268.
- Wittgenstein, Ludwig 1963 *Tractatus logico-Philosophicus*, Frankfurt am Main: Suhrkamp
- Wittgenstein, Ludwig 1989 Ludwig Wittgenstein und der Wiener Kreis: Gespräche, aufgezeichnet von Friedrich Waismann, Frankfurt am Main: Suhrkamp
- Wittgenstein, Ludwig 2001 *Tractatus logico-Philosophicus*, Kritische Edition, Frankfurt am Main: Suhrkamp
- Wittgenstein, Ludwig 2000 *Wittgenstein's Nachlass: The Bergen Electronic Edition*, Wittgenstein Archives at the University of Bergen (Hrsg.), Oxford: Oxford University Press.