

# Zeit im Gödelschen Universum

HEINZ RUPERTSBERGER, WIEN

Die Existenz einer globalen Zeit wurde bereits 1905 durch die spezielle Relativitätstheorie von Albert Einstein eingeschränkt. Mit seiner allgemeinen Relativitätstheorie 1915 legte er die Grundlage für die moderne Kosmologie. Es dauerte jedoch 34 Jahre bis Gödel durch seine kosmologische Lösung von Einsteins Feldgleichungen der Gravitation bewies, dass Lösungen mit akausalem Verhalten nicht ausgeschlossen sind. Das Gödelsche Universum wird daher als erstes Beispiel einer Kosmologie, in der es keine globale Zeitordnung der Ereignisse gibt, beschrieben und mit experimentellen Daten verglichen.

## 1. Einleitung

Die Vorstellung der Existenz einer absoluten Zeit, durch die alle Raum-Zeitpunkte, bzw. Ereignisse in diesen, eindeutig zeitlich geordnet werden können, wie sie u.a. Newton vertrat, wurde bereits durch die spezielle Relativitätstheorie eingeschränkt. Eine ihrer beiden Grundlagen sind das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, d.h. jeder Beobachter misst im Vakuum für Licht (stellvertretend für elektromagnetische Wellen) die gleiche Geschwindigkeit. Zusammen mit dem Postulat, dass es kein ausgezeichnetes Inertialsystem gibt, also physikalische Gesetze für alle Beobachter, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit und damit kräftefrei (erstes Newtonsches Axiom) bewegen, gleich aussehen, ergibt sich als Konsequenz, dass Raum und Zeit nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden können. In diesem 4-dimensionalen sogenannten Raum-Zeit Kontinuum gibt es allgemeines Einverständnis über die zeitliche Aufeinanderfolge zweier Ereignisse nur dann, falls ein Signal, das höchstens mit Lichtgeschwindigkeit läuft, zumindest prinzipiell vom früheren zum späteren gesendet werden kann. Der frühere Raum-Zeitpunkt kann dann, zumindest im Prinzip, den späteren beeinflussen, sie sind kausal verknüpfbar. Es gibt also keine Umkehr von Ursache und Wirkung, die Kausalität bleibt gewahrt. Der Begriff der Gleichzeitigkeit verliert jedoch seine Bedeutung, da in einem Bezugssystem gleichzeitige Ereignisse wegen der Endlichkeit

der Lichtgeschwindigkeit nie kausal verknüpft sein können. Was für den einen Beobachter gleichzeitig ist, wird von einem relativ dazu bewegten Beobachter als nicht gleichzeitig gesehen und die Aufeinanderfolge von kausal prinzipiell nicht verknüpfbaren Ereignissen kann sich für verschiedene, relativ zueinander gleichförmig bewegte Beobachter, sogar umkehren. Weiterhin misst jedoch jeder Beobachter in seinem System räumliche Abstände mit einem Maßstab und zeitliche mit einer Uhr. Die zeitlichen und räumlichen Beiträge zum Abstand zweier Ereignisse in der 4-dimensionalen Raum-Zeit, der für alle Beobachter gleich ist, unterscheiden sich durch ein Vorzeichen und einen relativen Faktor der Lichtgeschwindigkeit zum Quadrat. Es ist daher keineswegs so, dass Raum und Zeit nicht voneinander unterschieden sind, aber die absolute Zeit und der von dieser unabhängige absolute Raum eines Newton existieren seit der speziellen Relativitätstheorie zumindest in der Physik nicht mehr.

## 2. Raum-Zeitstruktur in der allgemeinen Relativitätstheorie

In der speziellen Relativitätstheorie ist die Struktur der Raum-Zeit, in der Ereignisse beschrieben werden, vorgegeben und daher die in ihr herrschende Kausalität bzw. eingeschränkte zeitliche Ordnung problemlos global beschreibbar. Das ändert sich wesentlich in der allgemeinen Relativitätstheorie. Einstein postulierte, dass lokal, d.h. in kleinen Raum-Zeit Bereichen, die Bewegung in einem beschleunigten Bezugssystem nicht von der in einem Gravitationsfeld unterschieden werden kann (Äquivalenzprinzip). Ein im Gravitationsfeld frei fallender Beobachter stellt daher ein Inertialsystem dar, da alle Körper im Schwerfeld gleich schnell fallen und daher keine Geschwindigkeitsunterschiede durch dieses hervorgerufen werden können. Das gilt aber nur lokal, da im Allgemeinen das Schwerfeld vom betrachteten Raum-Zeitpunkt abhängt. Davon ausgehend gelangte er zu der Vorstellung, dass die Massenverteilung oder allgemeiner die Energie-Impuls-Dichte die Quelle der Raum-Zeit Struktur ist, genauso wie in der Elektrodynamik die Ladungen als Quellen das zugehörige elektromagnetische Feld erzeugen. Damit wird aus der pseudo-Euklidischen, ebenen Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie die pseudo-Riemannsche, gekrümmte der allgemeinen Relativitätstheorie. Dieser Übergang ähnelt in zwei Dimensionen dem von einer Ebene zur Oberfläche einer Kugel oder einer anderen gekrümmten Fläche, wobei „pseudo“ noch den diffizilen Un-

terschied zwischen Raum- und Zeitkoordinaten andeutet. Der kräftefreien Bewegung auf Geraden im ebenen Raum entspricht die Bewegung auf geodätischen Linien im gekrümmten Raum, im speziellen Fall der Kugeloberfläche auf Großkreisen. Raum und Zeit können nun nicht mehr getrennt von der Materieverteilung bzw. Energie-Impuls-Dichte betrachtet werden, sie sind durch die Einsteinschen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie miteinander verbunden. Die beschleunigte Bewegung in der Newtonschen Gravitationstheorie im flachen Raum wird zur kräftefreien Bewegung auf einer geodätischen Linie im gekrümmten Raum, auf ihr bewegen sich frei fallende Beobachter. Gleichzeitig wird damit das Problem der instantanen Newtonschen Fernwirkungstheorie der Gravitation aufgelöst. Dafür geht die Überschaubarkeit der globalen Raum-Zeit Struktur, wie sie in der speziellen Relativitätstheorie noch gegeben ist, verloren.

### 3. Vereinfachungen für kosmologische Lösungen der allgemeinen Relativitätstheorie

Es lag natürlich von Anfang an nahe, auch unser Universum mit Hilfe der Einsteinschen Feldgleichungen zu beschreiben. Die Galaxien mit ihren Sternen, schwarzen Löchern usw. erzeugen dann über ihre Energie-Impuls-Dichte unsere Raum-Zeit Geometrie. Die Lösung der Feldgleichungen würde dann sowohl die Vergangenheit wie auch die Zukunft unseres Universums angeben. In dieser Allgemeinheit ist das jedoch aussichtslos. Erstens müsste die Verteilung der Energie-Impuls-Dichte des Universum als Quelle global und für alle Zeiten bekannt sein und zweitens wären die Gleichungen für diese ungeheure Zahl von Objekten, die sich unter dem Einfluss der Gravitation bewegen, viel zu kompliziert. Es sind daher drastische Vereinfachungen bezüglich der Energie-Impuls-Dichte Verteilung des Universums notwendig. Jede auf diese Weise erhaltene Lösung wird als kosmologische bezeichnet und ist von Interesse, da aufgrund der nichtlinearen Struktur der Feldgleichungen selbst bei einfachsten Annahmen keineswegs alle Lösungen im Allgemeinen bekannt sind. Daher kann jede mögliche Effekte andeuten, oder Hinweise dazu liefern, welche zusätzlichen Forderungen zu verlangen sind, um eine dem realen Universum entsprechende kosmologische Lösung zu finden, die mit den experimentellen Daten übereinstimmt. Zunächst werden Einflüsse der drei anderen fundamentalen Wechselwirkungen, der elektro-schwachen und der starken, vernachlässigt, da sie entweder nur kurzreichweitig oder wegen der

in Übereinstimmung mit experimentellen Daten angenommenen Ladungsneutralität des Universums zu keinen langreichweitigen Kräften führen. Die Mittelung über Distanzen, die groß im Vergleich zum Abstand der Galaxien des Universums sind, ersetzt dessen zunächst diskrete Struktur durch eine stetige Energie-Impuls-Dichte Verteilung. Es entsteht das Bild einer strömenden Flüssigkeit mit entsprechender Druck- und Dichteverteilung, die durch die Gleichungen der relativistischen Hydrodynamik beschrieben wird. Es gibt keinen Grund dafür, einen Punkt des Universums, also auch nicht unser Sonnensystem, als irgendwie ausgezeichnet anzusehen. Daher wird zusätzlich angenommen, dass das Weltall homogen ist, das heißt es sieht überall gleich aus. Diese Annahme wird als kosmologisches Prinzip bezeichnet. Eine inselförmige Materieverteilung mit Vakuum rundherum würde z.B. dieses Prinzip verletzen.

#### 4. Das Gödelsche Universum

Aufgrund dieser Vereinfachungen wurden im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie verschiedenste kosmologische Modelle entwickelt, so zuerst schon 1917 von Einstein selbst (Einstein 1917). Doch erst 1949 gelang es Gödel (Gödel 1949) durch seine exakte kosmologische Lösung mit einer vollständigen Beschreibung ihrer globalen Struktur zu beweisen, dass die allgemeine Relativitätstheorie im Allgemeinen keine Aussage über die Existenz einer absoluten Zeitkoordinate macht, die eine eindeutige Bestimmung der zeitlichen Ordnung von im Prinzip kausal verknüpfbaren Ereignissen ermöglicht. Im Gödelschen Universum sind Zeitreisen in die Vergangenheit möglich, d.h. man kann ausgehend von einem Raum-Zeitpunkt zu diesem oder vor diesem zurückkommen, sozusagen seine eigene Geburt sehen bzw. beeinflussen. Vergangenheit und Zukunft können nicht mehr eindeutig definiert werden.

Die Grundlagen für diese kosmologische Lösung kann man folgendermaßen beschreiben. Die Materie wird durch eine ideale, druckfreie Flüssigkeit, eine Art kosmischer Staub, die rotiert aber nicht expandiert, dargestellt. Diese Rotation sieht für jeden Beobachter, der sich mit der Materie des Universums bewegt, die in diesem Modell geodätischen Linien folgt, gleich aus, alle sehen die gleiche konstante Winkelgeschwindigkeit. Sie kann mit Hilfe eines Foucaultschen Pendels, das sich mit der Materie sozusagen frei fallend mitbewegt, gemessen werden. Aufgrund des Trägheitsgesetzes kann sich seine Pendelebene nicht ändern und damit die Drehung der Pendele-

bene relativ zur lokalen Umgebung beobachtet werden. Die Situation ist ähnlich der eines Beobachters in einem Satelliten mit Ellipsenbahn um die Erde. Die Ellipsenbahn entspricht einer geodätischen Linie im Schwerfeld der Erde, der Beobachter ist daher in einem frei fallenden Zustand und damit in einem lokalen Inertialsystem. Aber die Schwingungsebene eines Pendels wird sich während eines Umlaufs um die Erde für diesen Beobachter um  $360^\circ$  drehen. Durch die Rotation ist eine Richtung, die Drehachse, ausgezeichnet und gleichzeitig Bewegung in Form der Drehung vorhanden. Daher ist dieses Universum anisotrop, d.h. es sieht nicht nach allen Richtungen gleich aus, sondern eben nur homogen und auch nicht statisch, aber stationär, es bietet für alle Zeiten den gleichen Anblick. Es kann also nicht unser Weltall darstellen, da es im Widerspruch zur experimentell beobachteten Expansion der Raum-Zeit steht. Das war auch der Anlass für Gödels zweite allgemeinere Arbeit über rotierende Universen (Gödel 1950), in der jedoch keine weiteren expliziten Lösungen angegeben werden. Die Vorstellung liegt nahe, dass eine Rotation, die auch die Zeitkoordinate betrifft, die kausale Struktur einer Raum-Zeit im Großen zerstören kann. Um so erstaunlicher ist es, dass in vorhergehenden Arbeiten, die den Einfluss rotierender Massen auf die Raum-Zeit Geometrie untersuchten, dieser Aspekt nicht diskutiert wurde (Thirring 1918, Stockum 1937). Dieser sogenannte Thirring-Lense Effekt ist erst vor kurzem experimentell durch Beobachtung der Bahnen zweier Satelliten um die Erde bestätigt worden (Ciufolini 2004). Es gab auch schon einige Zeit vor Gödel zumindest eine exakte kosmologische Lösung mit Rotation (Lanczos 1924), die aber weder die globale Raum-Zeitstruktur noch die Rotation diskutierte. Gödel hat vermutlich höchstens von den Arbeiten Thirrings gewusst, da er ja zur relevanten Zeit in Wien studierte und arbeitete. In seiner Vorlesung in Princeton 1949 wird allerdings nur Gamow mit dem Vorschlag, dass das gesamte Universum sich in einem Zustand der gleichförmigen Rotation befindet, namentlich erwähnt (Gödel 1949b). Die Rotation wirkt gegen die Gravitationsanziehung. Beide zusammen reichen jedoch noch nicht für einen Gleichgewichtszustand aus, sodass Gödel noch eine kosmologische Konstante hinzufügen musste. Diese wurde bereits von Einstein (Einstein 1917) für seine kosmologische Lösung eines statischen, räumlich endlichen aber unbegrenzten Universums benötigt und war für ihn ein Teil der Raum-Zeit Geometrie. Bei Gödel steht sie jedoch auf der selben Seite der Feldgleichungen wie die Energie-Impuls-Dichte des Universums und wird damit zu einer Quelle der Raum-Zeit. Das entspricht auch dem derzeitigen Ver-

ständnis, dass die kosmologische Konstante u.a. die quantenmechanische Vakuumenergie und/oder so genannte dunkle Materie repräsentiert. Wird die Energie-Impuls-Dichte eines Universums durch die relativistische Hydrodynamik beschrieben, dann kann eine kosmologische Konstante stets durch Umdefinition der Dichte- und Druckverteilung in diesen Größen absorbiert werden. Im Fall von Einstein bedeutet das einen konstanten negativen Druck, was jedoch noch nichts über seine Auswirkungen aussagt, da es zunächst nur auf Druckunterschiede ankommt. In der allgemeinen Relativitätstheorie bewirkt ein konstanter negativer Druck eine Expansion der Materie, also eine Art Antigravitation, die im Einsteinschen statischen Kosmos der anziehenden Schwerkraft entgegen wirkt. Also genau das Gegenteil einer Implosion, die man zunächst mit negativem Druck verbinden würde. Bei Gödel hat die kosmologische Konstante im Gegensatz zu Einstein einen negativen Wert, entspricht also einem positiven konstanten Druck und wirkt daher anziehend, verstärkt also die Schwerkraft. Sie ist offensichtlich zusätzlich notwendig, um das durch die Rotation hervorgerufene Auseinanderstreben der Materie zu stabilisieren. Als der expandierende Charakter des Universums an Hand der Rotverschiebung der Spektrallinien entfernter Galaxien experimentell nachgewiesen wurde, hat Einstein diese ad hoc eingeführte kosmologische Konstante wieder verworfen. Theoretisch kann über ihr Vorzeichen kaum etwas ausgesagt werden. Nimmt man an, dass sie durch die quantenmechanische Vakuumenergie entsteht, so tragen Fermionen, Teilchen mit halbzahligen inneren Drehimpuls, negativ und Bosonen, Teilchen mit ganzzahligen inneren Drehimpuls, positiv zu ihr bei. Lange Zeit dominierte die Annahme einer verschwindend kleinen kosmologischen Konstanten, worin man auch eine weitere Begründung für die Existenz der Supersymmetrie für Elementarteilchen sah, d.h. jedes bekannte Fermion hat einen supersymmetrischen bosonischen Partner und umgekehrt. Daher erhält man in einer supersymmetrischen Theorie insgesamt keinen Beitrag der quantenmechanischen Vakuumenergie zur kosmologischen Konstanten. Allerdings hat man bis heute keinerlei Anzeichen für diese durch die Supersymmetrie geforderten neuen Teilchen gefunden. Die derzeitigen experimentellen Daten über eine starke Expansion der Raum-Zeit haben jedoch zu einer Wiedereinführung einer positiven kosmologischen Konstanten, der Antigravitation von Einstein, geführt.

Unabhängig vom konkret betrachteten Universum wird jedem Ereignis sein zugehöriger Raum-Zeitpunkt zugeordnet. Physikalisch mögliche Bewegungen entsprechen dann der kontinuierlichen Aufeinanderfolge solcher

Raum-Zeitpunkte, den sogenannten zeitartigen Weltlinien, mit der Eigenschaft, dass in jedem Punkt die Geschwindigkeit kleiner als die, oder für masselose Teilchen gleich der Lichtgeschwindigkeit sein muss. Im Spezialfall der kräftefreien Bewegung in der gekrümmten Raum-Zeit erfolgt die Bewegung auf den entsprechenden zeitartigen geodätischen Linien. Da die Lichtgeschwindigkeit die größtmögliche Signalgeschwindigkeit darstellt, beschränken Lichtstrahlen lokal in einem Raum-Zeitpunkt den Bereich, der diesen beeinflussen kann, also die Vergangenheit, sowie auch den, der von diesem beeinflusst werden kann und damit seine Zukunft. Das gilt jedoch in der allgemeinen Relativitätstheorie im Allgemeinen nur mehr lokal, da Lichtstrahlen zwar speziellen geodätischen Linien entsprechen, aber eben in einer gekrümmten Raum-Zeit. Im Gödelschen Universum sieht nun zunächst alles relativ harmlos aus. Der Raum besitzt in einer Richtung eine ebene, euklidische Struktur, daher kann diese bei der Untersuchung der kausalen Struktur vernachlässigt werden. Zur Beschreibung dieses Universums wird das bereits von Gödel angegebene Koordinatensystem, über das in der allgemeinen Relativitätstheorie ja frei verfügt werden kann, verwendet. In diesem verlaufen die geodätischen Materieweltlinien parallel zur gewählten Zeitkoordinate, es wird der Standpunkt eines mit der Materie mitschwimmenden Beobachters gewählt. Es sind alle zeitartigen geodätischen Linien bekannt, sie sind unendlich ausgedehnt und schneiden sich selbst nie im selben Raum-Zeitpunkt. Es stellt sich heraus, dass jede dieser Geodäten, die von einem Raum-Zeitpunkt der Materieweltlinie ausläuft, nach endlicher Zeit wieder zu dieser zurückkehrt, nachdem sie ein endliches Raumgebiet durchlaufen hat. Am weitesten können sich Lichtstrahlen entfernen, die damit die maximale räumliche Distanz bestimmen, die man sich auf einer geodätischen Bahn von der Materieweltlinie entfernen kann. Alle Lichtstrahlen ausgehend von einem Punkt der Materieweltlinie laufen später wieder in einem Punkt dieser zusammen. Sie erzeugen damit für den Beobachter auf der Materieweltlinie einen kreisförmigen optischen Horizont, von außerhalb diesem Gebiet können von ihm keine Lichtsignale empfangen werden. Innerhalb dieses Bereichs gibt es eine eindeutige, durch die Materieweltlinie des Beobachters bestimmte Zeitrichtung für alle Bewegungen. Untersucht man nun wie Lichtstrahlen ausgehend von Raum-Zeitpunkten außerhalb des optischen Horizonts für den Beobachter auf der Materieweltlinie aussehen (die er natürlich nie sehen kann), so stellt man fest, dass plötzlich Bewegungen möglich sind, die relativ zu seiner Zeitrichtung in die Vergangenheit zeigen. Nur beschleunigte Bewegungen, z.B. mit einer Rakete,

können den optischen Horizont durchbrechen. Dann kann es zu überraschenden Effekten kommen. Startet man mit einer Rakete von einer Materieweltlinie und überschreitet den optischen Horizont, so kann man zu einer benachbarten gelangen, bevor diese ein gleichzeitig vom selben Punkt ausgesendeter Lichtstrahl erreicht. In gewissem Sinn eine Reise mit Überlichtgeschwindigkeit in die Zukunft, Informationen können rascher als das Licht übermittelt werden (Pfarr 1981). Diese Art von Zukunftsreise hat nichts mit dem Effekt der Zeitdilatation durch eine beschleunigte Bewegung bzw. in einem Gravitationsfeld zu tun, führt aber noch immer nicht zu akausalen Verhältnissen. Entfernt man sich jedoch von einer Materieweltlinie auf einer beschleunigten Bahn weiter als dem Durchmesser des optischen Horizonts, so erscheinen die dort lokal ausgestrahlten Lichtstrahlen derart verzerrt, dass zeitartige Weltlinien möglich werden, die zum selben oder sogar zu einem früheren Zeitpunkt der ursprünglichen Materieweltlinie zurückkehren. Damit ist bewiesen, dass die allgemeine Relativitätstheorie Universen zulässt, in denen aufgrund der globalen Geometrie der Raum-Zeit die Kausalität verletzt wird. Zeitreisen in die Vergangenheit werden möglich mit allen damit zusammenhängenden Problemen, wie u.a. der schon erwähnten Frage, ob man seine eigene Geburt verhindern kann. Diese geometrischen Verhältnisse werden z.B. in (Rupertsberger 2002) veranschaulicht.

## 5. Größenordnungen und Schlussbemerkungen

Um eine Vorstellung über die involvierten Größenordnungen zu bekommen, kann man für den einzigen freien Parameter dieses Universums den gegenwärtigen Wert der Materiedichte unseres Universums einsetzen. Für eine volle Umdrehung wird etwa das zehnfache des gegenwärtigen Alters des Universums benötigt, der optische Horizont hat etwa die Größe des Durchmessers des Universums, falls man nur das Alter desselben zur Abschätzung heranzieht. Die kosmologische Konstante entspricht dem etwa  $10^{-15}$ -fachen des normalen Luftdrucks auf der Erde. Man kann sich nun für Zeitreisen die Erde als Rakete vorstellen, deren Materie als Treibstoff dient, der mit Lichtgeschwindigkeit ausgestoßen wird. Dann ergibt eine äußerst grobe Abschätzung, dass für eine Reise von einer Materieweltlinie um 100 Jahre in die Vergangenheit derselben bei einer Reisedauer von 100 Jahren mindestens soviel Materie verbraucht wird, dass die Erde am Schluss der Reise auf eine Kugel mit etwa 6m Radius geschrumpft ist. Um die astronomischen Entfernungen in der kurzen Zeit von nur 100 Jahren zurücklegen



zu können, sind zusätzlich Reisegeschwindigkeiten extrem nahe der Lichtgeschwindigkeit notwendig (Pfarr 1981). Diese Größenordnungen zeigen die Schwierigkeiten real funktionierende Zeitmaschinen, falls sie überhaupt möglich sind, zu konstruieren, ändern jedoch nichts an der Tatsache, dass sie innerhalb der Voraussetzungen der allgemeinen Relativitätstheorie nicht ausgeschlossen werden können. So konnte auch die Antwort Einsteins auf die kausalen Probleme in Gödels Lösung nur lauten: „*Es wird interessant sein zu erwägen, ob diese nicht aus physikalischen Gründen auszuschließen sind*“ (Einstein 1949). Ein wesentlicher Fortschritt zu dieser Bemerkung ist derzeit nicht ersichtlich. Gegenwärtig werden akausale kosmologische Lösungen durch die *chronology protection conjecture* Anfang 1990 von Hawking (Hawking 1992) ausgeschlossen. Sie besagt, dass die Gesetze der Physik das Auftreten geschlossener zeitartiger Bahnen verhindern. Das wird versucht mit Hilfe von speziellen Beispielen zu belegen, bleibt aber trotzdem nur eine Vermutung.

So entsteht im Rahmen der Physik aus der absoluten, universellen Zeit Newtons der Zeitbegriff der speziellen Relativitätstheorie, der nur mehr für im Prinzip kausal verknüpfbare Ereignisse eine eindeutige Zeitrichtung festlegt, die dann ohne weitere Zusatzannahmen in der allgemeinen Relativitätstheorie global nur mehr abhängig vom speziell betrachteten Universum existiert oder verschwindet.

## Literatur

- Ciufolini, Ignazio und Pavlis, Erricos C. 2004 „A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense-Thirring effect“, *Nature*, 431, 958–960.
- Einstein, Albert 1917 „Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie“, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* 142–152.
- 1949 „Bemerkungen zu den in diesem Band vereinigten Arbeiten“, in: Paul Arthur Schilpp (Hrsg.), *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher*, Stuttgart (Kohlhammer) 1955 (engl. Original Evanston IL (Northwestern UP) 1949).
- Gödel, Kurt 1949 „An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein’s Field Equations of Gravitation“, *Reviews of Modern Physics* 21, 447–450.

- Gödel, Kurt 1949b „Lecture on rotating universes“, in: Solomon Feferman (Hrsg.), *Kurt Gödel, Collected Works*, vol.3, 269–287.
- 1950 „Rotating Universes in General Relativity Theory“, in: L.M. Graves et al (Hrsg.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Providence Rh.I.: American Mathematical Society, vol.1, 175–181.
- Hawking, Stephen W. 1992 „Chronology protection conjecture“, *Physical Review D* 46/2, 603–611.
- Lanczos, Kornel 1924 „Über eine stationäre Kosmologie im Sinne der Einsteinschen Gravitationstheorie“, *Zeitschrift für Physik* 21, 73–110.
- Pfarr, Joachim 1981 „Time Travel in Gödel’s Space“, *General Relativity and Gravitation* 13/11, 1073–1091.
- Rupertsberger, Heinz 2002 „Das Gödelsche Universum“, in: Bernd Buldt et al (Hrsg), *Kurt Gödel - Wahrheit & Beweisbarkeit*, Wien: öbv & hpt, vol.2, 219–229.
- Stockum, W.J. van 1937 „The Gravitational Field of a Distribution of Particles Rotating about an Axis of Symmetry“, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, A 57, 135–154.
- Thirring, Hans 1918 „Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie“, *Physikalische Zeitschrift*, 19, 33.